## Inauguració d'un zenitògraf solar

El dijous 20 de maig al migdia ens vam reunir al jardí de la meva casa de l'Ametlla del Vallès una colla d'amics —majoritàriament matemàtics de la UAB— per inaugurar un estrany artefacte que d'ara endavant denominarem *zenitògraf solar*, a falta de cap nom millor. Explicarem aquí el propòsit d'aquest giny i el seu funcionament.

Gairebé tothom sap que els habitants de qualsevol indret de la Terra situat entre els dos tròpics tenen el privilegi de poder veure el Sol en el zenit al migdia local (de temps solar vertader) de dos dies de l'any. Recordem que el zenit és el punt de l'esfera celeste situat en la vertical de l'observador. Per tant, el fet que el Sol estigui en el zenit vol dir que en aquell moment l'observador té el Sol en la vertical del seu cap i no fa ombra, com la protagonista de l'òpera de Richard Strauss «Die Frau ohne Schatten».

Si algú vol presenciar en directe aquest esdeveniment (de no fer ombra), on ha d'anar i quan? Recordo que una vegada em vaig dirigir a una agència de viatges per demanar que me n'organitzessin un per contemplar aquest fenomen. Ells, que tenen tota mena d'informació sobre esdeveniments culturals, de segur que sabrien on i quan passava això. Però davant la meva sorpresa, la noia que m'atenia, després d'haver consultat molt de temps el seu ordinador, va respondre'm en castellà: «Por 'sol en el zénit' no me viene nada, y por 'sin sombra' me vienen infinidad de cosas que no tienen nada que ver con lo que usted desea.» Des d'aquell dia vaig decidir construir un aparell que m'indiqués en cada moment (en temps real) el lloc de la Terra on es produeix aquest fenomen.

Com que sóc aficionat als rellotges de sol vaig idear un giny que, mitjançant l'ombra que fa un cert objecte sobre un mapamundi, indica el meridià per on passa el Sol en cada moment, així com el punt de la Terra des del qual es veu el Sol en el zenit: concretament el punt d'intersecció de la superfície terrestre amb el segment rectilini que uneix el centre de la Terra i el centre del Sol. Aquest és l'artefacte que vam inaugurar el dia 20 de maig i que podeu veure en la fotografia. Està construït sobre una placa de llautó d'un centímetre de gruix.

Explicarem a continuació el seu fonament teòric. Clavem un pal sobre una superfície horitzontal, que per claredat d'exposició suposarem que és el terra, com si volguéssim fer un rellotge de sol horitzontal, tradicional. Aquest pal el clavem de manera que sigui paral·lel a l'eix de rotació de la Terra (a la nit apuntarà, doncs, a un punt molt pròxim a l'estrella polar). Designem per $p$ aquest pal. Hi posem una boleta a sobre, en un punt qualsevol. Designem per $C$ aquesta boleta i per $P$ la intersecció del pal amb el terra. Vegeu la figura 1.

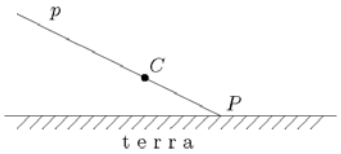


Figura 1.

Considerem ara una esfera $S$ de centre $C$ i de radi la distància entre $C$ i $P$. Aquesta esfera servirà per explicar teòricament com es construeix l'aparell que estem descrivint, però a la pràctica no hi ha de ser. Denominarem *equador* d'aquesta esfera el cercle màxim obtingut per intersecció amb $S$ del pla perpendicular a $p$ que passa per $C$. El punt $P$ serà per a nosaltres el pol sud d'aquesta esfera. Per a nosaltres un meridià d'aquesta esfera serà qualsevol semicercle que vagi de pol a pol. És a dir, del punt $P$ al punt diametralment oposat. Remarquem el fet que un meridià és un semicercle i no pas un cercle. Considerem el meridià $m_0$ d'aquesta esfera determinat per la part superior de la intersecció amb $S$ del pla vertical que conté la recta $p$. Vegeu la figura 2.

Com que la recta $p$ és paral·lela a l'eix de rotació de la Terra, podem pensar que l'esfera $S$ s'ha obtingut per un encongiment de l'esfera terrestre (homotècia des del centre) seguit d'una translació (paral·lela) que ha portat el centre de la Terra al punt $C$. En aquesta transformació (encongiment seguit de translació) el

meridià terrestre que passa per l'observador es converteix en el meridià $m_0$ de $S$.

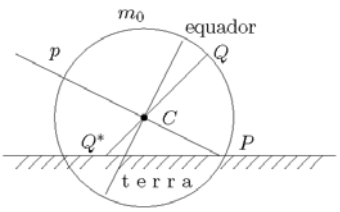


Figura 2.

Suposem que sobre l'esfera $S$ tenim dibuixat un mapa del món de tal manera que el meridià terrestre que passa per l'observador sigui el meridià $m_0$ de $S$. En virtut de la posició particular de $S$ (obtinguda per encongiment i translació paral·lela de la Terra), l'angle amb què incideix qualsevol raig de sol sobre l'esfera $S$ en un punt determinat d'aquesta coincideix amb l'angle amb què els habitants situats en el lloc del món corresponent a aquell punt de l'esfera veuen com incideixen els rajos de sol sobre el seu terra en aquell indret. Si entre tots els rajos de sol que il·luminen $S$ en un determinat moment, escollim el que passa pel centre $C$ de $S$, la intersecció d'aquest raig amb $S$ correspondrà a l'indret de la Terra on els seus habitants veuen el sol en el zenit en aquell moment (vegeu la figura 3, en la qual això està simplificat en dues dimensions).

Definim ara una aplicació $f$ d'un determinat subconjunt de l'esfera $S$ (el domini de $f$) en el pla del terra. Per definir aquesta aplicació comencem definint el seu domini. Un punt $Q \in S$ és del domini de $f$ si la recta $QC$ talla el terra en un punt $Q^*$ i si el punt $C$ queda entremig de $Q$ i de $Q^*$. Llavors definim l'aplicació $f$ com la que aplica cada punt $Q$ del domini de $f$ en $Q^*$. Vegeu la figura 2.

Considerem el fragment de mapa que està contingut en el domini de $f \subset S$, i el traslladem al terra mitjançant l'aplicació $f$. O sigui, per a cada punt $Q$ del mapa que tenim en el domini de $f$ dibuixem el punt $Q^* = f(Q)$ del mapa sobre el terra. Observeu que el pol nord de $S$ es transforma per $f$ en el punt $P$. En canvi, el pol sud de $S$ no és del domini de $f$ i, per tant, no correspon a cap punt en el mapa del terra.

Observeu que els meridians de l'esfera $S$ es transformen per l'aplicació $f$ en rectes que passen pel punt $P$ (pol nord del mapa del terra). Per tant, els meridians del mapa que tindrem dibuixat al terra seran rectes concurrents en el punt $P$. L'ombra del pal pel Sol sobre el mapa del terra correspondrà en cada moment al meridià sobre el qual es troba el Sol en aquell moment.

D'altra banda, sigui $A$ la intersecció amb $S$ del raig de sol que passa per $C$ (figura 3). Hem dit abans que $A$ correspon a l'indret de la Terra des del qual els seus habitants veuen el Sol en el zenit. Però el punt $A$ es transforma per $f$ en el punt $A^* = f(A)$, que és precisament l'ombra que fa el punt $C$ sobre el terra. En conseqüència, l'ombra que fa el punt $C$ sobre el terra indica en el mapa dibuixat sobre el terra l'indret de la Terra on els seus habitants veuen el Sol en el zenit.

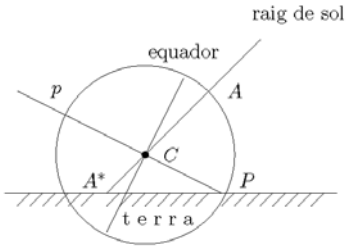


Figura 3.

Com haureu observat a les fotografies que s'inclouen, el mapamundi que s'obté amb la projecció que hem descrit resulta molt deformat respecte als que estem acostumats a veure. Així, per exemple, el sud d'Àfrica s'allarga extraordinàriament i Madagascar sembla una illa immensa. Per contra, Europa queda petita, però gens deformada. Els països que estan molt a l'est o molt a l'oest (costa atlàntica dels Estats Units o l'Índia) també queden força estranys.

Tot això que hem dit per a un zenitògraf solar horitzontal ho podríem repetir de manera bastant anàloga per a un zenitògraf vertical situat sobre una paret. En aquest cas el mapa que resulta és encara més estrany —i, per tant, més divertit— que el corresponent a zenitògrafs horitzontals. Pensant una mica us adonareu que si el zenitògraf és vertical el país on està emplaçat aquest no surt (és a l'infinit) i que, a més, el mapa queda de cap per avall, amb el pol sud a la part superior.

El zenitògraf horitzontal del jardí de casa meva té en el marc una graduació de meridians de 15 en 15 graus. Hi ha, doncs, petits segments rectilinis corresponents al meridià origen i als meridians de graus 15, 30, 45, etc., tant a l'est

com a l'oest de Greenwich. Quan l'ombra passa per un d'aquests senyals, llavors el sol passa sobre la Terra pel meridià corresponent. Dit d'una altra manera, en aquell moment el segment rectilini que uneix el centre del Sol amb el centre de la Terra talla aquell meridià. Per exemple, quan l'ombra del pal passa pel senyal del marc corresponent a 15 graus est, en aquell moment són les 11 hores solars vertaderes del meridià de Greenwich. Així, doncs, l'artefacte té també la funció de rellotge de sol tradicional, perquè indica l'hora de temps solar vertader de Greenwich.

Joan Girbau
UAB

# Premis

## Societat Catalana de Matemàtiques

### Convocatòries del 2011

La Societat Catalana de Matemàtiques ha convocat enguany una edició més, dins el cartell de premis de l'IEC, del premi

**Premi Évariste Galois**

Instituït l'any 1962 i convocat per quaranta-vuitena vegada, s'ofereix a un treball d'investigació, bibliogràfic o d'assaig sobre matemàtiques. Està dotat amb mil euros (1.000 €).
Termini per a la presentació de candidatures: 3 de desembre de 2010 a les 13 h.

Més informació: http://scm.iec.cat

### Guardonats en la convocatòria del 2010

• El Premi Josep Teixidor de Matemàtiques ha estat atorgat a Elisenda Feliu i Trijueque pel treball *Sobre la teoria d'intersecció aritmètica superior*.

• El Premi Évariste Galois ha estat atorgat a Joan Bosa Puigredon pel treball *Complecions de semigrups. Aplicacions al semigrup de Cuntz*. El jurat va concedir dos accèssits a David Arazo Marin pel treball *No anul·lació de funcions L en valors crítics i resultats d'equidistribució en aritmètica* i a Víctor González Alonso pel treball *Gèrmens polars i invariants de singularitats*.

Aquests premis foren lliurats el passat 22 d'abril en l'acte de lliurament de premis i borses d'estudis de l'Institut d'Estudis Catalans.